TD n°6: Retour sur les résidus et théorème de Rouché

Analyse complexe 2024-2025, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

N'hésitez pas à m'écrire si vous trouvez une erreur dans la correction ou si vous voulez une clarification !

Retour sur le théorème des résidus

Exercice 1. Une intégrale pour commencer.

1. Il s'agit ici de reconnaître
$$i\int_0^{2\pi} e^{f(e^{i\theta})}d\theta = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{e^{f(z)}}{z}dz$$
et d'appliquer le théorème des résidus avec le fait que le seul pôle de $z \mapsto e^{f(z)}/z$ se situe en 0 et son résidu est $e^{f(0)}$.

2. On applique la formule à $f(z) = az$. On calcule
$$e^{ae^{i\theta}} = e^{a\cos(\theta)}\big[\cos(a\sin(\theta)) + i\sin(a\sin(\theta))\big]$$
et donc
$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos(\theta)}\big[\cos(a\sin(\theta)) + i\sin(a\sin(\theta))\big]d\theta = 2\pi.$$
On obtient le résultat en prenant la partie réelle.

Exercice 2. Une dernière intégrale.
La fonction
$$\frac{(\log(-z)+i\pi)^3}{z^2+1}$$
a deux pôles en i et $-i$, de résidus respectifs
$$\frac{1}{2i}\left(\frac{i\pi}{2}\right)^3 \text{ et } -\frac{1}{2i}\left(\frac{3i\pi}{2}\right)^3.$$
On obtient, en prenant $\delta \to 0$, $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$:
$$\int_0^\infty \frac{\log(x)^3}{1+x^2}dx - \int_0^\infty \frac{(\log(x)+2i\pi)^3}{1+x^2}dx = \pi\left(\frac{-i\pi^3}{8} + \frac{27i\pi^3}{8}\right).$$
On vérifie que
$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+1} = \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2+1} + \int_1^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}.$$
Un changement $y = 1/x$ transforme la deuxième intégrale en
$$\int_0^1 \frac{\log(1/y)}{1+1/y^2}\frac{dy}{y^2} = -\int_0^1 \frac{\log(y)}{1+y^2}dy$$
ce qui prouve que $\int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}dx = 0$. On en déduit finalement que
$$-6i\pi\int_0^\infty \frac{\log(x)^2}{x^2+1}dx - (2i\pi)^3\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{13i\pi^4}{4}.$$
Comme $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}$, on trouve finalement
$$\int_0^\infty \frac{\log(x)^2}{x^2+1}dx = \frac{1}{6i\pi}\left(4i_pi^4 - \frac{13i\pi^4}{4}\right) = \frac{\pi^3}{8}.$$

Exercice 3. Les valeurs de ζ aux entiers pairs.

On considère la fonction méromorphe

$$f(z) = \frac{2i\pi}{z^{2k}(e^{2i\pi z} - 1)}.$$

Pour $\Re(s) > 1$, on pose

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s}.$$

1. La fonction $\frac{e^z - 1}{z}$ est une fonction entière ne s'annulant pas en 0 et ayant un développement en série entière à coefficients rationnels, plus précisément :

$$\frac{e^z - 1}{z} = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{(n+1)!}.$$

Son inverse est donc développable en série entière au voisinage de zéro, et puisque

$$\frac{1}{1 - g(z)} = \sum_{n \geqslant 0} g(z)^n$$

les coefficients de Taylor sont rationnels.

2. $z \mapsto e^{2i\pi z} - 1$ a un zéro simple en tout entier naturel, et $z \mapsto z^{2k}$ ne s'annule pas en $n \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Il s'ensuit que f a un pôle simple en n, dont le résidu est donné par

$$\frac{1}{n^{2k}} \lim_{z \to n} \frac{2i\pi(z-n)}{e^{2i\pi(z-n)} - 1} = \frac{1}{n^{2k}}.$$

3. $1/z^{2k}$ a un pôle d'ordre $2k$ en 0, et $\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}$ a un pôle d'ordre 1, donc f a un pôle d'ordre $2k+1$. Le résidu se lit directement sur le développement en série de Laurent de f au voisinage de 0 :

$$f(z) = 2i\pi \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} (2i\pi)^n z^{n-2k-1} = \sum_{n \geqslant -2k-1} \frac{B_{n+2k+1}}{(n+2k+1)!} (2i\pi)^{n+2k+1} z^n.$$

Le coefficient de z^{-1} est $\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!}$.

4. L'intégrale sur le N-ème carré englobe les entiers $-N, ..., -1, 1, ..., N$ et donc

$$2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{(2k)!} + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_N} f(z) dz.$$

Démontrons que $\frac{1}{e^{2i\pi z} - 1}$ est bornée sur les carrés C_N quand $N \to \infty$. Le carré comporte quatre côtés. Le côté vertical droit est paramétré par $N + 1/2 + it, t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$. Sur ce côté, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{2i\pi(N+1/2+it)} - 1} \right| &= \left| \frac{1}{e^{2Ni\pi + i\pi - 2\pi t} - 1} \right| \\ &= \left| \frac{1}{-e^{-2\pi t} - 1} \right| \\ &= \frac{1}{1 + e^{-2\pi t}} \leqslant 1 \end{aligned}$$

Sur le côté vertical gauche, qui est paramétré par $-N - 1/2 + it$, $t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$, on obtient exactement la même borne.

On s'occupe à présent des côtés horizontaux. Le côté horizontal haut est paramétré par $t + i(N + 1/2)$, et on obtient donc :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{e^{2i\pi(t+iN+i/2)} - 1} \right| &= \left| \frac{1}{e^{2i\pi t - (2N+1)\pi} - 1} \right| \\ &\leqslant \frac{1}{\left| \left| e^{2i\pi t} e^{-(2N+1)\pi} \right| - 1 \right|} \\ &\leqslant \frac{1}{1 - e^{-(2N+1)\pi}} \end{aligned}$$

qui est borné quand $N \to \infty$. Le côté horizontal inférieur est paramétré par $t - iN - i/2$, $t \in [-N - 1/2, N + 1/2]$ et on obtient de manière très similaire à la manipulation précédente la borne

$$\left| \frac{1}{e^{2i\pi(t-iN-i/2)}} \right| \leq \frac{1}{e^{(2N+1)\pi} - 1}.$$

Le membre de droite converge vers 0 quand $N \to \infty$, et il en découle que $\frac{1}{e^{2i\pi z - 1}}$ est bornée globalement sur les C_N.

$$\sup_{z \in C_N} |f(z)| \leqslant 2i\pi \sup_{z \in C_N} \left| \frac{1}{e^{2i\pi z} - 1} \right| \sup_{z \in C_N} \frac{1}{|z|^{2k}} = O(1)O(1/N^{2k}) = O(1/N^{2k}).$$

On peut alors borner

$$\left| \int_{C_N} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in C_N} |f(z)| \ell(C_N) = O(1/N^{2k-1})$$

car la longueur $\ell(C_N) = 8N + 4$ est un $O(N)$. En prenant $N \to \infty$ dans

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} = -\frac{(2i\pi)^{2k} B_{2k}}{2(2k)!} + \frac{1}{4i\pi} \int_{C_N} f(z) dz$$

on obtient donc le résultat désiré.

Exercice 4. Une somme de cotangentes hyperboliques.
On pose, pour $k \geqslant 0$ entier :

$$S_k = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}, \ T_k = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2\pi n} - 1)}.$$

1. On a

$$\coth(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1} = 1 + \frac{2}{e^{2z} - 1}$$

d'où

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}} = 2 \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{4k+3}(e^{2n\pi} - 1)} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^{4k+3}}.$$

2. On écrit $z \coth(\pi z) = \frac{2z}{e^{2z} - 1} + z$. Un calcul explicite donne $B_1 = -1/2$, et donc

$$z \coth(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_n}{n!} (2z)^n - 2B_1 z.$$

La partié de $z \coth(z)$ permet de conclure que les coefficients d'ordre impair dans ce développement son nuls, et donc finalement

$$z \coth(z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{B_{2n}}{(2n)!} (2z)^{2n}.$$

3. La fonction f a un pôle d'ordre $4k + 5$ en 0 et des pôles simples sur le reste de $\mathbb{Z}$ et $i\mathbb{Z}$. Comme $\cot(\pi z)$ a un résidu de $\frac{1}{\pi}$ en tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\coth(\pi z)$ a un résidu de $\frac{1}{\pi}$ en tout $in \in i\mathbb{Z}$, le résidu de f en n est $\frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}\pi}$ et le résidu de f en in est $\frac{\cot(in\pi)}{(in)^{4k+3}\pi} = \frac{\coth(n\pi)}{i^{4k+4} n^{4k+3}\pi}$. Reste à déterminer le résidu en 0, qui est le coefficient d'ordre -1 dans le produit. Pour simplifier, on peut se rendre compte que

$$\pi z \coth(\pi z) = -2 \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \zeta(2n) z^{2n}$$

et donc $\pi z \cot(\pi z) = -2 \sum_{n \geqslant 0} \zeta(2n) z^{2n}$ en utilisant $\cot(z) = i \coth(iz)$. De là, on calcule explicitement

$$z^2 \coth(\pi z) \cot(\pi z) = \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geqslant 0} \left(\sum_{\ell + m = n} (-1)^m \zeta(2m) \zeta(2\ell) \right) z^{2n}.$$

Pour obtenir f, on doit multiplier par z^{-4k-5}, et le résidu de f en 0 sera donc le coefficient de z^{4k+4}, c'est-à-dire

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2k+2}(-1)^m\zeta(2m)\zeta(4k+4-2m).$$

4. On intègre encore sur le même carré et les bornes se passent en gros de la même façon. Le théorème des résidus donne donc

$$\sum_{n\neq 0}\mathrm{Res}_n(f)+\sum_{n\neq 0}\mathrm{Res}_{in}(f)+\mathrm{Res}_0(f)=0.$$

On trouve donc

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n\neq 0}\frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2k+2}(-1)^m\zeta(2m)\zeta(4k+4-2m)=0$$

et en exploitant la parité de $\coth(\pi z)/z^{4k+3}$ et en réarrangeant

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\coth(n\pi)}{n^{4k+3}}=\frac{4}{\pi^2}\sum_{m=0}^{2k+2}(-1)^{m+1}\zeta(2m)\zeta(4k+4-2m).$$

L'exercice précédent donne que $\zeta(2k)$ est de la forme $\pi^{2k}q_k$ avec q_k rationnel, et donc $\frac{1}{\pi}\zeta(2m)\zeta(4k+4-2m)$ est égal $\pi^{4k+3}q_{2m}q_{4k+4-2m}$.

Exercice 5. Sommes de fractions rationnelles.

1. Il suffit d'intégrer $\frac{2i\pi P(z)}{Q(z)(e^{2i\pi z}-1)}$ sur le même carré que d'habitude.

2. On trouve, d'après la question précédente et par parité de f :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{1}{2}\sum_{n\neq 0}\frac{P(n)}{Q(n)}=-\frac{1}{2}\mathrm{Res}_0\left(f(z)\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}\right)-i\pi\sum_{Q(\alpha)=0}\mathrm{Res}_\alpha\left(f(z)\frac{1}{e^{2i\pi z}-1}\right).$$

Reste à calculer les résidus. Le résidu en 0 se calcule explicitement par produit de Cauchy de $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}=\sum_{l\geqslant 0}\frac{B_l}{l!}(2i\pi)^l z^{l-1}$ et $P(z)/Q(z)=\sum_{m\geqslant 0}c_{2m}z^{2m-2k}$. Le terme d'ordre -1 dans ce produit est précisément

$$\sum_{2m-2k+2l-1=-1}c_{2m}\frac{(2i\pi)^{2l}B_{2l}}{(2l)!}$$

qui se transforme en la forme annoncée sans encombre (Le terme d'ordre impair B_1 n'intervient pas car il est multiplié par c_{2k-1}, qui est nul par parité de f). Reste à calculer le résidu en α racine simple de Q. On pose $Q_\alpha(z)=Q(z)/(z-\alpha)$, qui vérifie $Q_\alpha(\alpha)=Q'(\alpha)$. Le résidu de $f(z)\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}$ en α est donc

$$\frac{2i\pi}{e^{2i\pi\alpha}-1}\cdot\frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}.$$

Exercice 6. Séries de Fourier pour formes modulaires 🏠

On définit, pour $\Im(\tau)>0$:

$$G_{2k}(\tau)=\sum_{(m,n)\neq(0,0)}\frac{1}{(m+n\tau)^{2k}}.$$

On considère, pour $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$, la fonction méromorphe

$$f_w(z)=\frac{2i\pi}{(z-w)^{2k}(e^{2i\pi z}-1)}.$$

1. Le résidu de f_w en $m\in\mathbb{Z}$ est $\frac{1}{(m-w)^{2k}}$ car $1/(z-w)^{2k}$ n'y a ni zéro ni pôle et $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1}$ y a un pôle de résidu 1.

2. On utilise la formule par la dérivée du résidu : f_w a un pôle d'ordre $2k$ en w. Comme $\Im(w) > 0$, on a $\frac{2i\pi}{e^{2i\pi z}-1} = -2i\pi \sum_{d\geqslant 0} e^{2i\pi dz}$ au voisinage de w car $|e^{2i\pi z}| = e^{-2\pi \Im(z)}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\operatorname{Res}_w(f_w) &= \frac{1}{(2k-1)!}\frac{\partial^{2k-1}}{\partial z^{2k-1}}\left(-2i\pi \sum_{d\geqslant 0} e^{2i\pi dz}\right)_{z=w} \\ &= -2i\pi \frac{1}{(2k-1)!}\sum_{d\geqslant 1}(2i\pi d)^{2k-1}e^{2i\pi dw}.\end{aligned}$$

3. Même rengaine que d'habitude, l'intégrale sur le grand carré converge vers 0 donc la somme des résidus de la fonction est nulle, ce qui donne l'égalité vu les résidus.

4. On décompose les sommes en $n > 0$ et $n < 0$. En faisant un changement $m \to -m$, on voit que

$$\sum_{m\in\mathbb{Z},n>0} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} = \sum_{m\in\mathbb{Z},n>0} \frac{1}{(m-n\tau)^{2k}}.$$

On calcule donc cette deuxième somme. Comme elle converge absolument, on peut changer l'ordre de sommation

$$\sum_{n>0}\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{1}{m-n\tau}\right) = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n\geq 1}\sum_{d\geq 1} d^{2k-1}q^{nd}.$$

La deuxième double somme converge également absolument : c'est une série entière en q où l'on somme un nombre fini de termes pour chaque puissance de q - on peut même constater que son rayon de convergence est 1 avec quelques estimations. On peut poser $r = np$, et on a

$$\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{n\geq 1}\sum_{d\geq 1} d^{2k-1}q^{nd} = \frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r\geqslant 0}\left(\sum_{d|r} d^{2k-1}\right)q^r.$$

On obtient donc l'égalité voulue pour la somme sur $n < 0$, et en rajoutant l'autre moitié de la somme, on obtient bien

$$\sum_{m\in\mathbb{Z},n\neq 0} \frac{1}{(m+n\tau)^{2k}} = 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r\geqslant 0}\sigma_{2k-1}(r)q^r.$$

5. On commence par utiliser le fait que

$$G_{2k}(\tau) = 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r\geqslant 0}\sigma_{2k-1}(r)q^r + \sum_{n=0,m\neq 0}\frac{1}{m^{2k}} = 2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!}\sum_{r\geqslant 0}\sigma_{2k-1}(r)q^r + 2\zeta(2k).$$

Il s'agit alors simplement d'utiliser la formule de $\zeta(2k)$ pour vérifier que

$$2\frac{(2i\pi)^{2k}}{(2k-1)!2\zeta(2k)} = -\frac{4k}{B_{2k}}.$$

6. C'est un calcul direct :

$$\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m-n/\tau)^{2k}} = \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{\tau^{2k}}{(m\tau-n)^{2k}} = \tau^{2k}\sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^{2k}}.$$

On a donc $G_{4k+2}(i) = G_{4k+2}(-1/i) = i^{4k+2}G_{4k+2}(i) = -G_{4k+2}(i)$, d'où $G_{4k+2}(i) = 0$.

7. On écrit

$$\sum_{r\geqslant 1}\sigma_{2k-1}(r)q^r = \sum_{n\geqslant 1}\sum_{d\geqslant 1} d^{2k-1}q^{nd}$$

. En intervertissant les sommes, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 1}\sum_{d\geqslant 1} d^{2k-1}q^{nd} = \sum_{d\geqslant 1} d^{2k-1}\sum_{n\geqslant 1} q^{nd} = \sum_{d\geqslant 1}\frac{d^{2k-1}q^d}{1-q^d}.$$

En appliquant la formule à $q = e^{2i\pi i} = e^{-2\pi}$, et comme $G_{4k+2}(i) = 0$, on trouve

$$1 - \frac{4k}{B_{2k}} \sum_{n \geqslant 1} \frac{n^{4k+1}}{e^{2n\pi} - 1} = 0.$$

L'évaluation de la somme équivalente pour $4k-1$ impliquerait par exemple l'évaluation de $G_{4k}(i)$, non-nul, et fait appel à la théorie des formes modulaires et des courbes elliptiques.

Principe de l'argument et théorème de Rouché

Exercice 7. Quelques applications du théorème de Rouché.

1. On peut supposer $f(z)$ unitaire, n son degré. $f(z) - z^n$ est donc un polynôme de degré $< n$. Par croissance comparée, on aura $|z|^n > |f(z) - z^n|$ pour $|z|$ assez grand et par Rouché, f aura donc n racines comptées avec mulitplicité dans le disque correspondant.

2. Le point délicat ici est de trouver un lacet sur lequel $|z\sin(z)| > 1$ pour $|z|$ grand. La réponse est donnée par un rectangle de côtés verticaux $\pi/2 + n\pi + it$, $-R \leqslant t \leqslant R$. Comme $|\sin(a+ib)| \geq \sinh(|b|)$ (exercice !), on peut prendre R aussi grand que l'on veut et la majoration tiendra. Pour vérifier la majoration sur les côtés verticaux, on remarque que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm n\pi + it\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(it) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(it).$$

   Comme $\cos(it) = \cosh(t) \geqslant 1$, dès que n est assez grand on a bien $|z\sin(z)| > 1$ sur le rectangle. On en déduit que le nombre de solutions de $z\sin(z) = 1$ dans le rectangle choisi est le même que celui de $z\sin(z) = 0$. On sait que les solutions à la deuxième équation sont toutes réelles, et il y en a en particulier $2n+1$ (avec multiplicité, celle en 0 comptant double) dans le rectangle choisi (et ce peu importe R). D'autre part, en évaluant $z\sin(z) - 1$ en 0 et en $\pi/2 + k\pi$, $k = 0, ..., n$, on trouve $n+1$ racines réelles par le TVI. L'évaluation en $\pi/2 + k\pi, k = -n, ..., -1$ donne n autres racines dans le rectangle : on en a trouvé $2n+1$ et donc par le théorème de Rouché, on les a toutes trouvées. Comme l'union des rectangles pour $R > 0$, $n > 0$ recouvre $\mathbb{C}$, toutes les solutions de l'équation doivent être réelles.

Exercice 8. Un théorème de Hurwitz.
Comme $\overline{D} = \overline{\mathbb{D}}(a, r)$ est compact, $f_n \to f$ uniformément sur ce domaine. Comme f ne s'annule pas sur le bord du disque, on a $\inf_{z \in \partial D} |f| > 0$. Ainsi, pour n assez grand, on a $\sup_{z \in \partial D} |f(z) - f_n(z)| < \inf_{z \in \partial D} |f(z)|$, et on peut appliquer le théorème de Rouché pour conclure que f_n a autant de zéros que f dans l'intérieur du disque.

Exercice 9. Injectivité de fonctions holomorphes.

1. (a) Comme $\overline{\mathbb{D}}$ est compact, son image par f est compacte aussi, donc fermée, et même $f(\overline{\mathbb{D}}) = \overline{f(\mathbb{D})}$. Comme f est ouverte, on a $f(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D})^\circ$. Ainsi, $\partial f(\mathbb{D}) = f(\overline{\mathbb{D}}) \setminus f(\mathbb{D}) \subseteq f(\overline{\mathbb{D}} \setminus \mathbb{D}) = f(\partial\mathbb{D})$.

   (b) $f(\mathbb{D})$ est ouvert et non-dense (il est même borné). Ainsi, $\mathbb{C} \setminus \partial f(\mathbb{D})$ s'écrit comme union disjointe de deux ouverts, à savoir $\mathbb{C} \setminus \partial f(\mathbb{D}) = f(\mathbb{D}) \cup \mathbb{C} \setminus f(\overline{\mathbb{D}})$. D'autre part, on sait que $\partial f(\mathbb{D})$ est un fermé de $f(\partial\mathbb{D})$, qui est homéomorphe par f à un cercle (une application continue bijective entre deux compacts est un homéomorphisme). Or, aucun fermé du cercle à part le cercle lui-même ne sépare $\mathbb{C}$ en deux composantes connexes : on en déduit que $\partial f(\mathbb{D}) = f(\partial\mathbb{D})$.

2. Il faut faire attention à une subtilité ici : comme $f(\partial\mathbb{D}) = \partial f(\mathbb{D})$, on a $f(\mathbb{D}) \cap f(\partial\mathbb{D}) = \emptyset$, et $\frac{1}{z-w}$ n'a pas de pôle sur l'image de γ. Le chemin γ paramétrise simplement $f(\partial\mathbb{D})$, qui est le bord de $f(\mathbb{D})$: le reste est une conséquence de la formule de Cauchy, du du théorème des résidus, à ceci près qu'il faudrait montrer que γ est direct. On peut cependant remarquer que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-w} = \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

   et par le principe de l'argument, cette deuxième intégrale ne peut pas valoir $-2i\pi$ sans que $f - w$ aie des pôles dans $\mathbb{D}$.

3. Par le principe de l'argument, comme l'intégrale

$$\int_{\partial \mathbb{D}} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-w} d\zeta$$

vaut 0 ou $2i\pi$, la fonction $f-w$ a au plus un zéro, et ce pour tout w, ce qui implique que f est injective sur $\mathbb{D}$, et même sur $\overline{\mathbb{D}}$.

Exercice 10. Principe de l'argument généralisé et inversion locale.
Soit $U \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert simplement connexe, $f \in \mathcal{M}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(U)$ qui ne s'annule pas aux zéros et pôles de f.

1. On sait que f'/f a un pôle simple en chaque zéro et pôle de f avec $\mathrm{Res}_\alpha(f'/f) = v_\alpha(f)$, et comme g n'a ni zéro ni pôle en α on a

$$\mathrm{Res}_\alpha\left(g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = g(\alpha)\mathrm{Res}_\alpha\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = g(\alpha)v_\alpha(f).$$

De là, on utilise le théorème des résidus pour conclure.

2. On voit f comme une application C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, sa différentielle en a est la multiplication par $f'(a)$, vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Cette application étant inversible, le théorème d'inversion locale C^1 nous assure l'injectivité de f.
Il est également possible de faire une preuve plus pédestre en utilisant le développement en série entière de f au voisinage de a : quitte à enlever $f(a)$, on peut écrire $f(z) = (z-a)f'(a) + (z-a)^2 g(z)$. Si z est suffisamment proche de a, le terme d'ordre 2 sera négligeable devant celui d'ordre 1, et comme le terme d'ordre 1 est injectif, la fonction le sera. Le.a lecteur.ice peut s'amuser à écrire cet argument proprement, avec les bornes nécessaires.
L'holomorphie de la fonction donnée par la formule

$$w \mapsto \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D} \frac{zf'(z)}{f(z)-w} dz$$

se démontre avec des techniques standard d'interversion limite-intégrale ou de dérivation sous le signe intégral. On peut aussi vérifier que cette intégrale est égale à

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{f(\partial D)} \frac{dz}{z-w}$$

et comme $f(\partial D)$ est une courbe simple, on peut se ramener à la formule de Cauchy.

3. Les pôles de $\frac{f'(z)}{f(z)-w}$ sont précisément les z tels que $f(z) = w$. Sur D, f est injective et donc il n'y a qu'un seul pôle, d'ordre 1 car $f(z) - w$ est un zéro d'ordre 1 (la dérivée d'une fonction holomorphe injective n'est jamais nulle). Par le principe de l'argument généralisé, la valeur de l'intégrale est donc l'unique z tel que $f(z) = w$, autrement dit, c'est $f^{-1}(w)$.

4. Le théorème d'inversion locale C^1 prévoit que si $f : U \to \mathbb{R}^2$ est une fonction C^1 dont la différentielle est inversible en $a \in U$, alors f réalise un difféomorphisme sur un voisinage V de a.
On obtient donc une réciproque à $f|_V$, mais est-elle holomorphe ? La réponse se trouve dans la formule

$$d(g \circ f)_a = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

Si on pose $g = f^{-1}$ donnée par le théorème, sa dérivée en $f(a)$ est $(df_a)^{-1}$. Reste seulement à observer que l'inverse d'une application $\mathbb{C}$-linéaire bijective de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dans lui-même est encore $\mathbb{C}$-linéaire, et on a prouver que dg_b est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $b \in f(V)$, autrement dit, g est holomorphe.